UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS I

APUNTE TEÓRICO

(continuación)

CARRERAS:

- **LICENCIATURA EN SISTEMA DE INFORMACION**
- **PROFESORADO EN INFORMATICA**

CONTENIDOS:

UNIDAD II: LÍMITE Y CONTINUIDAD

II – 2 Funciones Continuas:

Continuidad de una función escalar en un punto. Propiedades de las funciones continuas en un punto. Continuidad en un conjunto. Propiedad de las Funciones Continuas en un intervalo.

EQUIPO CÁTEDRA:

- **Lic. María M. Simonetti de Velázquez**
- **Ing. Pablo Saracho**
- **Lic. Lidia de Pablo**
- **Prof. Diego Coria**
- **Prof. Ariana Origuela**

AÑO: 2021

FUNCIONES CONTINUAS

Funciones Continuas en un Punto

Supongamos que:

- f es una función escalar cuyo dominio es $d[f] \subset \mathbb{R}$
- $x_0 \in \mathbb{R}$

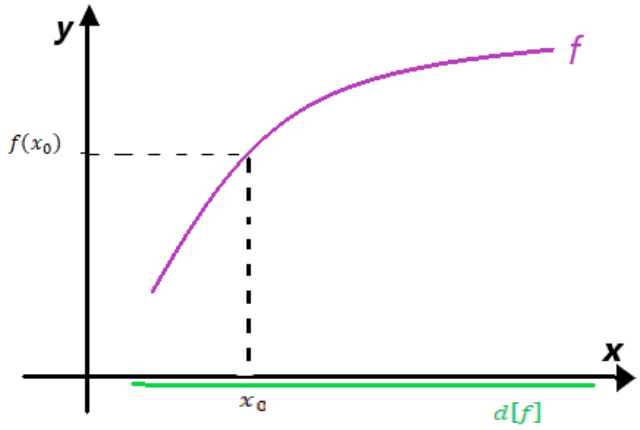
El conjunto $d[f]$ tiene al menos un punto en común con $E^*(x_0)$ es decir que $d[f] \cap E^*(x_0) \neq \emptyset$

Se dice que f es continua si se verifican las siguientes condiciones:

c1) $x_0 \in d[f]$, (es decir lo mismo que existe $f(x_0)$)

c2) existe y es finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$

c3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

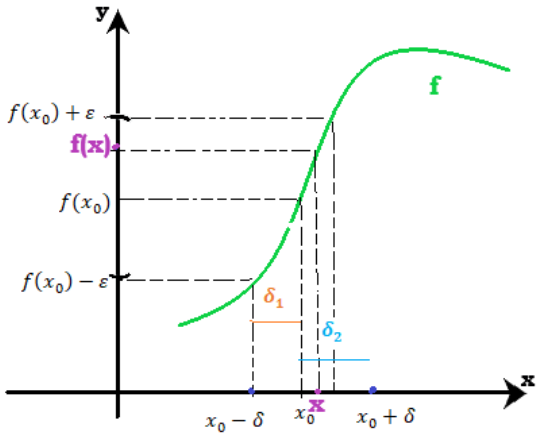


Intuitivamente: Una función f es continua en x_0 si para todos los puntos del dominio de la función suficientemente próximos a x_0, los valores correspondientes de f son próximos a $f(x_0)$

De forma gráfica una función es continua si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel

Se dice que una función es **continua** en x_0 si y solo si

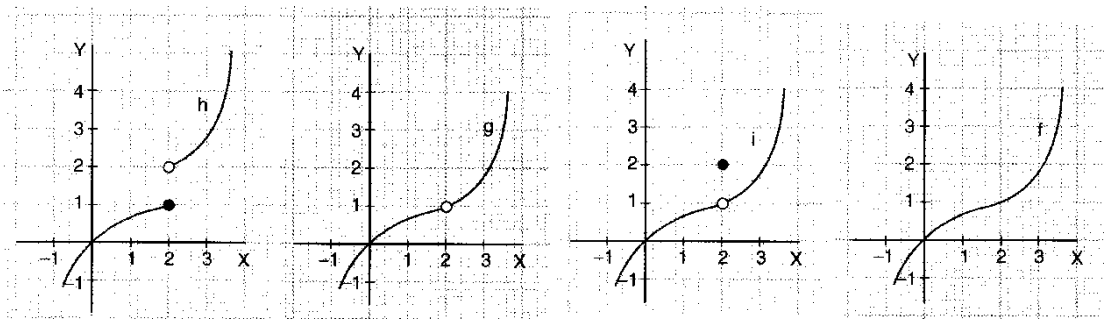
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x : x \in d[f] \ \wedge \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Llamo δ al menor entre δ_1 y δ_2

$\delta = \text{menor}\{\delta_1, \delta_2\}$

Los puntos en que haya que levantar el lápiz se llaman **puntos de discontinuidad**.



En las figuras anteriores vemos algunos casos (no todos) que pueden presentarse al pasar f por un punto x_0. (en este caso, para $x_0=2$)

En la primera figura la función no es continua porque los límites laterales son distintos, es decir, no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

En la segunda figura no existe la imagen del punto x_0 que sería $f(x_0)$.

En la tercera existe $f(x_0)$ pero no se cumple con la tercera condición de continuidad $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Y por último, en la cuarta figura se cumple las tres condiciones de continuidad y la función es continua.

Las funciones Constantes, Identidad, Potencial, Polinómicas son continuas en cada punto de sus respectivos dominios.

.

Ejemplos 1: La función f definida por la ecuación $f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x < 2 \\ 4 \ \ si \ x \geq 2 \end{cases}$ ¿es continua en el punto x = 2?

Veamos si se cumplen las tres condiciones de continuidad:

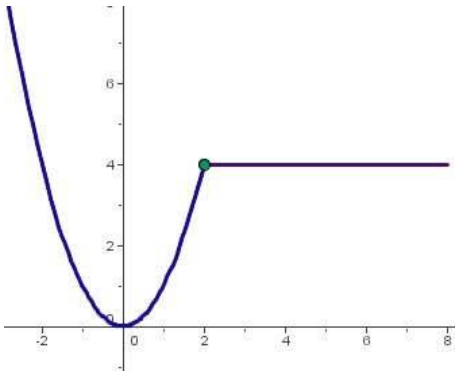
1. $\exists f(2)?$ Calculamos $f(2) = 4$

2. $\exists \lim_{x \to 2} f(x)$?

$$\begin{matrix} \lim_{x \to 2^+} 4 = 4 \\ \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x)$$

3. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Por tanto, f(x) **es continua** en el punto x = 2.



Ejemplo 2: La función f definida por la ecuación $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ¿es continua en el punto x = 3?

Veamos si se cumplen las tres condiciones de continuidad:

1. $\exists f(3)?$. Calculamos $f(3) = \frac{3+2}{3-2} = 5$

2.

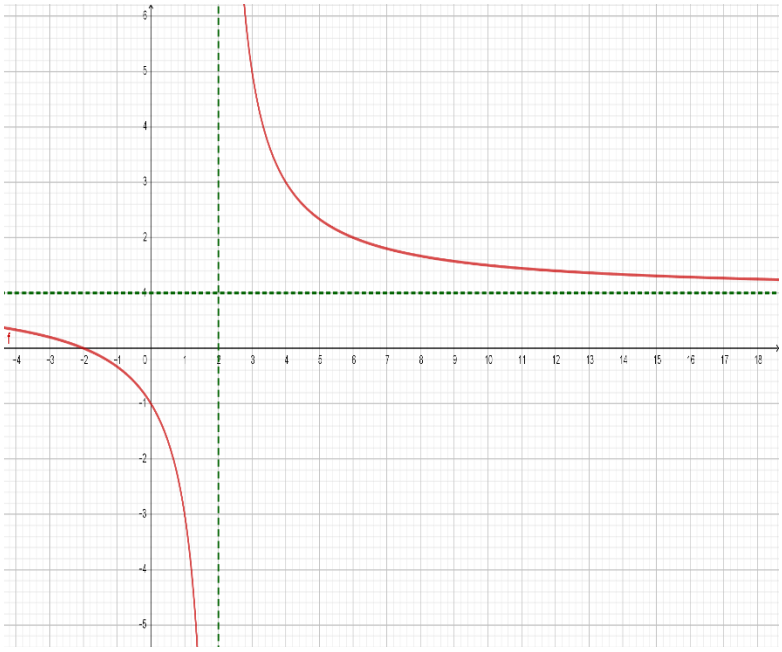
$\exists \lim_{x \to 3} f(x)?$

$\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$

3. $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Por tanto, $f(x)$ **es continua** en el punto x = 3.



La función Racional que es el cociente de dos funciones polinómicas es continua siempre que la función que se encuentra en el denominador no se anule en algún punto.

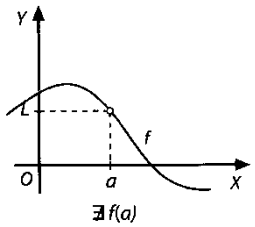
- Una función es **discontinua** en un punto sino **no** es continua en ese punto

Teniendo en cuenta que una función es continua en un punto x = a sí, y solo si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, en caso de que esta condición no se cumpla por algún motivo, tendremos uno de los siguientes tipos de discontinuidades.

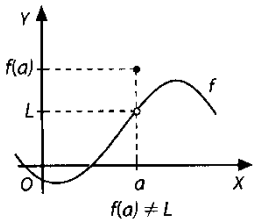
$$Dicontinuidades \begin{cases} Evitable \\ \\ Esencial \end{cases}$$

DISCONTINUIDAD EVITABLE.

Sea f una función discontinua en punto x_0 si existe y es finito $\lim_{x \to x_0} f$ se dice que la discontinuidad es **Evitable**



$\exists f(a)$
Discontinuidad evitable



$f(a) \neq L$
Discontinuidad evitable

Este tipo de discontinuidad se resolvería o evitaría redefiniendo la función para hacerla continúa a partir de la que tenemos, de la siguiente manera:

$$f(x)=f \text{ en d}[f]-\{x_0\} \wedge f(x_0)=\lim_{x \to x_0} f$$

Ejemplo:

- Estudiar la continuidad de la función definida por
- $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en el punto x = 3.

Si observamos la función, resulta que no está definida en el punto x = 3 pero, si calculamos el límite de la función en ese punto, obtenemos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x-3}=\lim_{x \to 3}(x-2)=3-2=1$$

que sería el verdadero valor de la función en ese punto. La nueva función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & si\ \ x\neq 3\\ 1 & si\ \ x=3\end{cases}$$

Luego sería continua en el punto x = 3.

DISCONTINUIDAD ESENCIAL

Se dice que la discontinuidad de f es **Esencial** si no es evitable, o sea sino existe el límite de la función en el punto.

Ejemplo Estudiar la continuidad de la función definida por;

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & si\ \ x\leq 1\\ 3-2x & si\ \ x>1\end{cases}$$ en el punto x=1

Para estudiar la continuidad en el punto x = 1, analizamos si se verifican las tres condiciones:

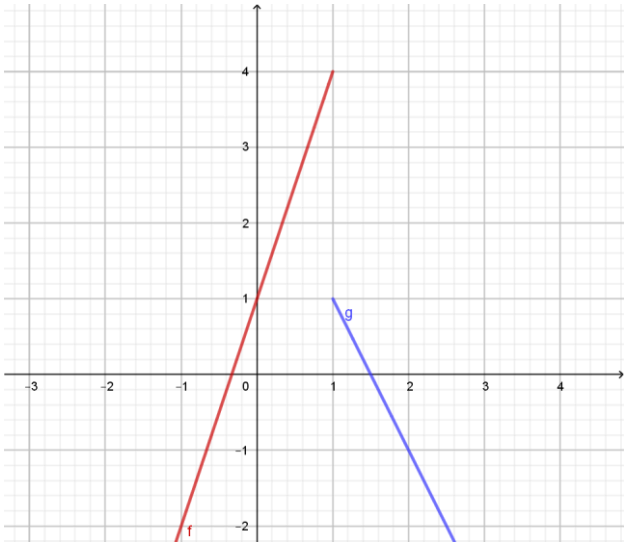
1°.- La función está definida en el punto x = 1: $f(1)=4$

2°.- Estudiamos la existencia del límite en x = 1, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-2x)=1$$

Al ser los límites laterales distintos, la función no tiene límite en dicho punto.

En consecuencia, en x = 1, la función presenta una discontinuidad esencial.



Ejemplo Estudiar la continuidad de la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si \;\; x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \;\; x>1 \end{cases}$$ en el punto x=1

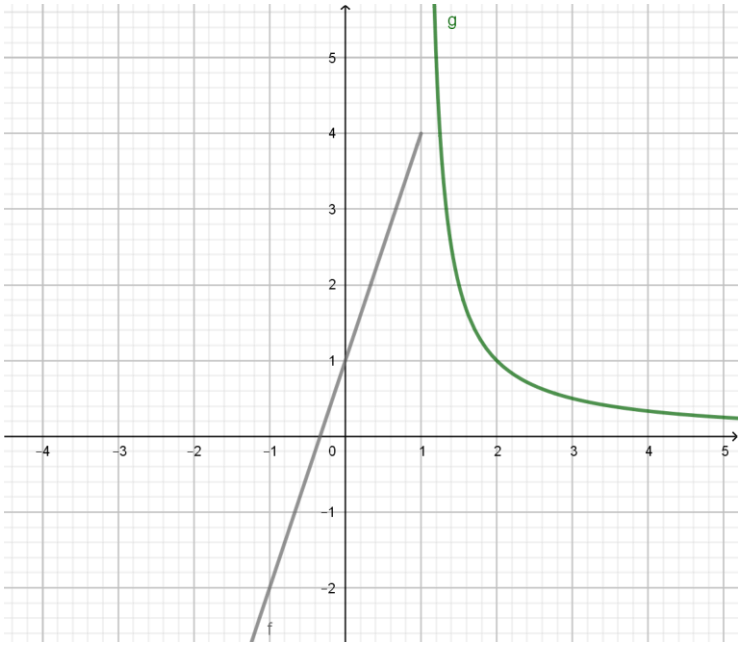
Para estudiar la continuidad en el punto x = 1, analizamos si se verifican los tres condiciones de continuidad

1°.- La función está definida en el punto x = 1: $f(1)=3.1+1=4$

2°.- Estudiamos la existencia del límite en x = 1, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

En consecuencia, en x = 1, la función presenta una discontinuidad inevitable



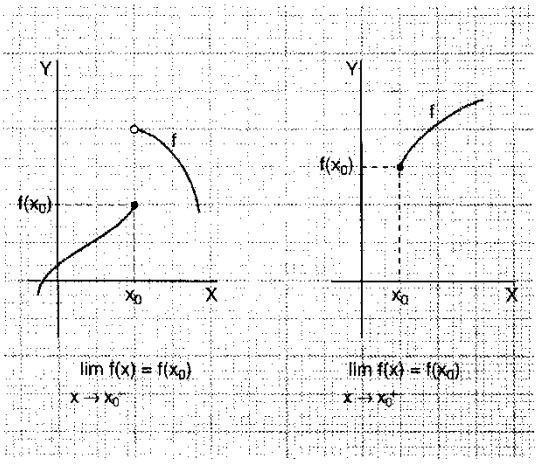
CONTINUIDAD LATERAL EN UN PUNTO

Se dice que una función f es **continúa a la derecha** en un punto x_0 si se verifican las siguientes condiciones:

1. $x_0 \in d[f]$
2. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe y es finito
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Se dice que una función f es **continúa a la izquierda** en un punto x_0 si se verifican las siguientes condiciones:

  1. $x_0 \in d[f]$
  2. $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existe y es finito
  3. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$



.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN PUNTO.

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones y de los límites, podemos deducir las siguientes propiedades:

Si f y g son funciones continuas en el mismo dominio D, entonces son continuas en x_0 las siguientes funciones:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f . g)(x) = f(x) . g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x_0) \neq 0$

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

Si f es continua en x_0, g es continua en $f(x_0)$, entonces gof es continua en x_0.

PROPIEDAD: La función f es continua en x_0 si y solo si

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

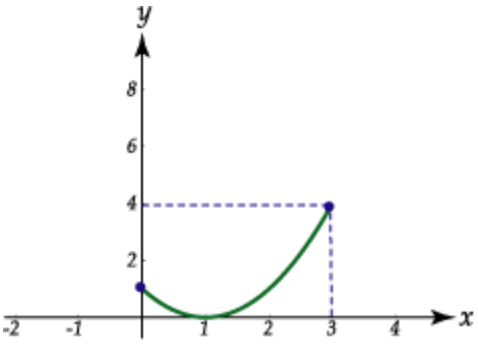
$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

CONTINUIDAD EN CONJUNTO.

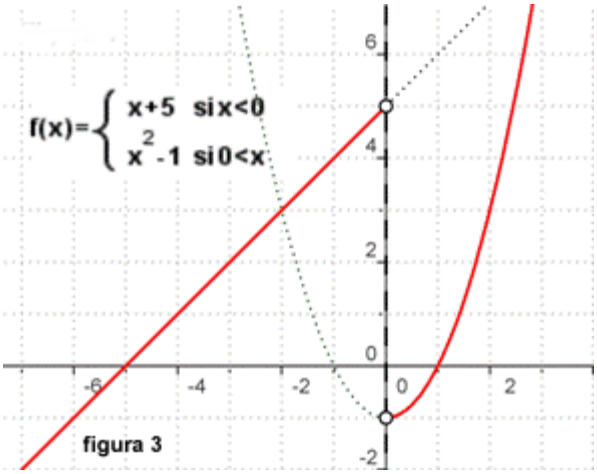
Sea f una función escalar y A un subconjunto del $d[f]$. Se dice que f es continua en el conjunto A si es continua en cada punto de A.

- Una función es continua en un intervalo $[a,b]$ si es continua en cada punto del (a,b) y además es continua a la derechas de "a" y a la izquierda de "b".
- f es continua en (a,b) si y solo si f es continua en cada $x \in (a,b)$

En caso de que el intervalo sea cerrado, [a, b], es necesario que la función también sea continua lateralmente en los extremos.



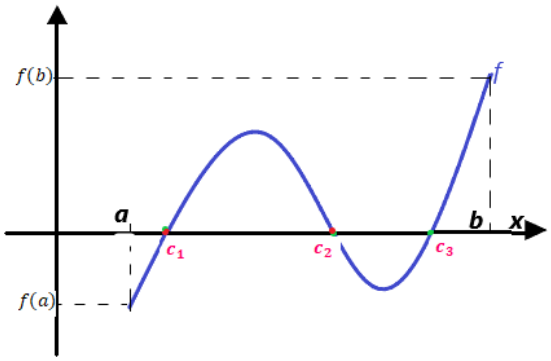
Así, en la función adjunta, podemos apreciar que hay continuidad en el intervalo [-4, -1], pero no en el intervalo [-1,1]



TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

TEOREMA DE BOLZANO Si una función f es continúa en un intervalo cerrado $[a,b]$, y $f(a).f(b) < 0$ entonces existe al menos un punto interior "c" del intervalo tal que $f(c) = 0$.

Interpretación geométrica:



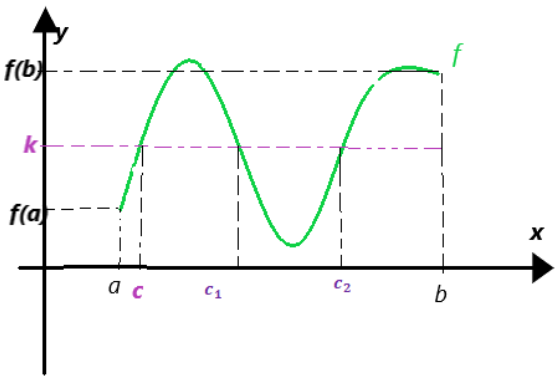
Geométricamente este teorema nos dice que, si una función f es continúa en un intervalo cerrado, entonces la misma toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo y por lo tanto en el interior de dicho intervalo hay al menos un punto para el cual el valor de la función es cero

Este teorema es de utilidad para la determinación de los ceros de una función.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es una función es continua en un intervalo cerrado [a,b], si

$f(a) < f(b)$ o $(f(a) > f(b))$ entoces, para cualquier valor k comprendido entre $f(a) < k < f(b)$ o $f(a) > k > f(b)$ existe al menos un c ∈ (a, b) tal que $f(c) = k$



Interpretación geométrica:

Geométricamente este teorema nos dice que si una función f es continua en [a,b] y $f(a) \neq f(b)$ entonces dicha función toma por lo menos cada uno de los valores de k comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

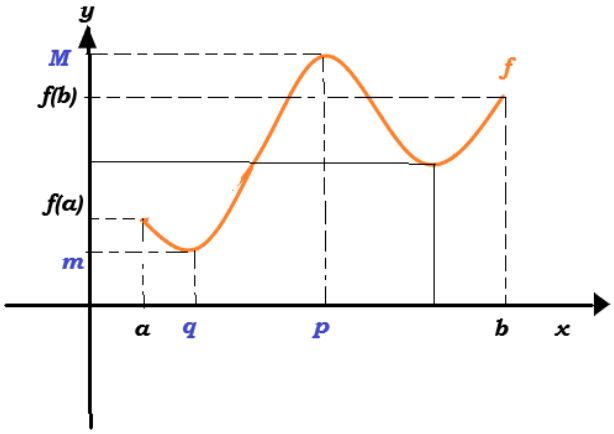
Los valores de una función continua en un intervalo cerrado

no pueden pasar de uno a otro sin hacerlo por todos los valores intermedios

TEOREMA: Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f está **acotada en dicho intervalo.**

TEOREMA DE WEIERSTRASS:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f tiene máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo



Interpretación geométrica:

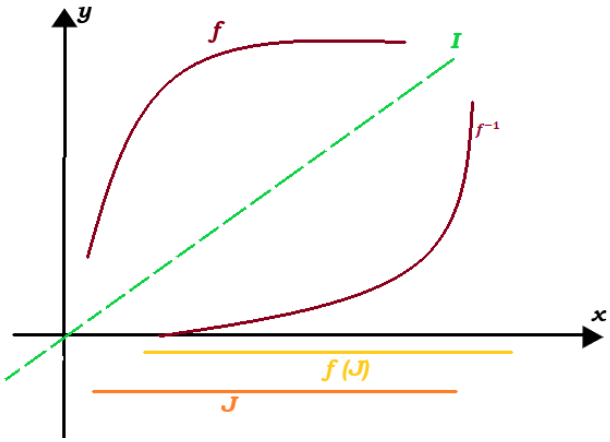
Geométricamente este teorema significa que dada una función continúa en un intervalo cerrado [a, b], su gráfica queda comprendida entre las rectas y = M e y = m, siendo **M** y **m** los valores máximo y mínimo que alcanza la función en el intervalo.

TEOREMA:

Si f es una función continua en un intervalo J, entonces es conjunto f (J) es un intervalo.

TEOREMA:

Si f es una función estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) y además es continua en un intervalo **"J"** entonces f^{-1} es una función estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) y además es continua en el intervalo $f(J)$


y
f
I
f^{-1}
x
f (J)
J